

名古屋工業大の数学

1993 年～2018 年



理数ゼミ

目 次

はじめに	ii
第 1 章 問題編	1
第 2 章 解答・解説編	111
最後に	348

はじめに

この度は、「名古屋工業大の数学 1993 年～2018 年」をご購入いただき誠にありがとうございます。
心より感謝いたします。

名古屋工業大学の入試は例年大問 4 題で、そのうち 3 題は数学Ⅲから出題されます。数学Ⅲの問題が解けるかどうかで合否が決まると言っても過言ではありません。レベルとしては標準的なものがほとんどですが、実際の試験では解き方がわかっていても計算量が多いことで、途中で不安になる受験生も多いでしょう。

対策としては、過去に出題された問題をすべて解けるようにすることが重要です。赤本では 2～3 年分くらいしか演習できないし、「京大の理系数学 25 ヵ年」のような大量に過去問演習できる書籍ありません。赤本で 2～3 年遡っても新たに出題されるようになる「複素数平面」の問題を知ることもできません。過去にどのような問題が出題されたのかという受験生が気になる点を解消するために、本書を執筆することにしました。

あなたの志望達成のために、本書が一助となれば幸いです。

著者

第1章 問題編

1993 年～2018 年の 26 年分の名工大入試数学（前期日程）を掲載しました。14 番から始まっているのは、1990 年第 1 問を 1 番としているためです。また，考え方や解答を書き込んだりできるように配慮し，1 ページに 1 つの大問を載せました。

名工大の試験時間は 120 分のため，目安として各問題を平均 25 分程度で，方針決定～解答作成を完成できるようにすると良いでしょう。

※「行列」の問題は範囲外なので学習しなくてよいです。

111. 関数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ のグラフを曲線 C とする。

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) 曲線 C の変曲点を求めよ。
- (3) 曲線 C 上の点 $(0, f(0))$ における接線を ℓ とする。曲線 C と接線 ℓ とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[2016 - 1]

112. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{(3n+4)a_n - 9n - 6}{(n+1)a_n - 3n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす。

(1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ であることを示せ。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおく。 b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。

(3) (2) で定めた数列 $\{b_n\}$ に対し, $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[2016 - 2]

113. 座標空間内に

$$O(0, 0, 0), A(1, 2, 2), B(1, 0, -1), C(2, -1, 1)$$

を頂点とする四面体 $OABC$ がある。 $t > 0$ に対して半直線 OB 上の点 P を $OB : OP = 1 : t$ となるようにとる。

(1) 内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ を t を用いて表せ。

(2) $\triangle APC$ の面積を $S(t)$ とおく。 $S(t)$ が最小になる t の値と, そのときの $S(t)$ の値を求めよ。

(3) 点 Q は直線 OB 上にあり, 点 R は直線 AC 上にある。線分 QR の長さの最小値と, そのときの点 R の座標を求めよ。

[2016 - 3]

114. 実数 t に対し, 複素数

$$\left(\frac{1}{2} + \cos t + i \sin t\right)^2$$

の実部を $f(t)$, 虚部を $g(t)$ とする。

座標平面上に曲線 $C: x = f(t), y = g(t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) がある。

- (1) $0 \leq t \leq \pi$ のとき $f(t)$ のとる値の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C 上の点 $P\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right), g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C の $y \leq 0$ の範囲にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[2016 - 4]

115. 関数 $f(x) = \frac{5e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$ に対して $c = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ とおく。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) c の値を求め, $f(x) \geq c$ となる x の範囲を求めよ。
- (3) $R > 1$ とする。曲線 $y = f(x)$ および 2 直線 $x = -\log R$, $y = c$ で囲まれた図形の面積 $S(R)$ を求めよ。
- (4) (3) で求めた $S(R)$ に対して, 極限值 $\lim_{R \rightarrow \infty} S(R)$ を求めよ。

[2017 - 1]

116. 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$x = \cos t + \frac{1}{3} \cos 3t, \quad y = \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t$$

で表される。時刻 t における点 P の速度を $\vec{v}$ とし、加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

- (1) 点 P の y 座標の取り得る値の範囲を求めよ。
- (2) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、速度 $\vec{v}$ が直線 $y = \sqrt{3}x$ と平行である時刻 t を求めよ。
- (3) $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき、加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ の最小値とその値を取る時刻 t を求めよ。
- (4) 時刻 $t = 0$ から $t = \pi$ までに点 P が通過する道のり L を求めよ。

[2017 - 2]

117. θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ をみたす定数とし, 自然数 n に対して $a_n = \tan \frac{\theta}{2^n}$ とおく。

(1) 数列 $\{2^n a_n\}$ の極限を求めよ。

(2) n が 2 以上のとき $\frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} = a_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$ とおく。 n が 2 以上のとき S_n を a_1 と a_n で表せ。

(4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ の和を求めよ。

[2017 - 3]

118. 複素数平面上的の原点 O と異なる 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ に対して

$$3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$$

が成り立つ。3 点 O , A , B を通る円を C とする。

(1) $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

(2) 円 C の中心と半径を α を用いて表せ。

(3) $|3\alpha - 2\beta|$ を β を用いて表せ。

(4) 次が成り立つとき α を求めよ。

(ア) 点 z が円 C 上を動くとき $w = i\bar{z}$ も C 上にある。

(イ) $\alpha + \bar{\alpha}$ は正の実数である。

(ウ) $|3\alpha - 2\beta| = 2\sqrt{6}$

[2017 - 4]

119. 次の問いに答えよ。

- (1) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ を満たす複素数 z の値を求めよ。また、このとき $\alpha = z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ。
- (2) $z + \frac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は、どのような図形を表すか。
- (3) $z + \frac{1}{z}$ が実数複素数 z と、 $\left| w - \left(\frac{8}{3} + 2i \right) \right| = \frac{2}{3}$ を満たす複素数 w について、 $|z - w|$ の最小値を求めよ。

[2018 - 1]

120. 関数 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ に対して、数列 $\{a_n\}$ を次で定義する。

$$a_1 = 3, a_{n+1} = f(a_n) \ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

方程式 $f(x) = x$ の解を α とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して、 $a_n > \alpha$ が成り立つことを示せ。
- (2) 自然数 n に対して、 $a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ が成り立つことを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し、その極限値を求めよ。

[2018 - 2]

121. 関数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ に対して, $g(t) = \int_0^1 |f(x) - t| dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値と最小値求めよ。

(2) $g(0)$ と $g(1)$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(4) $g(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) の最小値を求めよ。

[2018 - 3]

122. 座標空間内の 3 点

$O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 4)$, $B(1, -2, 2)$

を通る平面を α とする。 α 上にない 2 点 C, D は次を満たす。

- (i) 点 C, D は平面 α に関して同じ側にある。
- (ii) 点 C から α に垂線 CE を下ろすと、半直線 OE は角 AOB の二等分線であり、辺 AB と点 G で交わる。点 G は OE を $3:1$ に内分する。
- (iii) 点 D から α に垂線 DF を下ろすと、半直線 AF は辺 OB と点 H で交わる。点 H は辺 OB を $1:2$ に内分する。
- (iv) $CE = 2DF$

定数 k を $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AH}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表し、点 G の座標を求めよ。
- (2) 平面 α に垂直なベクトルで、長さが $\sqrt{26}$ となるものを 1 つ求めよ。
- (3) 点 C から平面 α 上の点を通り点 D へ最短経路がある。このときに通る平面 α 上の点を P とする。 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ および k を用いて表せ。
- (4) (3) において、点 P が $\triangle OAB$ の内部にあるための k の値の範囲を求めよ。

[2018 - 4]

第2章 解答・解説編

解答を作成するにあたり，所謂「ひらめき」や「思いつき」というものを可能な限り排除した標準的なものを掲載しました。また，ご購入者様から質問を頂いた箇所については，【補足】として質問の回答を載せていたり，解答自体をより分かりやすいものに書き換えています。さらに，解答を読んでいて分かりにくいかもしれないと感じた箇所は，より分かりやすい表現になるように加筆修正をしています。

解答を読んでいるときに問題文を確認できるようにするために，解答だけでなく問題も載せています。

111. 関数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ のグラフを曲線 C とする。

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) 曲線 C の変曲点を求めよ。
- (3) 曲線 C 上の点 $(0, f(0))$ における接線を ℓ とする。曲線 C と接線 ℓ とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[2016 - 1]

【解答】

(1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ より,

$$f'(x) = \frac{x^2+1 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると,

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

よって, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	...	$1 - \sqrt{2}$	...	$1 + \sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$\searrow$

したがって,

$$\text{極大値 } \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad \text{極小値 } -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

(2) $f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ より,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x+2)(x^2+1)^2 - (-x^2+2x+1) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(-2x+2)(x^2+1) - 4x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$ とすると,

$$(x+1)(x^2-4x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$$

ここで,

$$f(-1) = -1, f(2 + \sqrt{3}) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}, f(2 - \sqrt{3}) = -\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

であり, $x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$ のそれぞれの値の前後で $f''(x)$ の符号が変わるから, 求める変曲点は次の 3 点である。

$$(-1, -1), \left(2 + \sqrt{3}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}\right), \left(2 - \sqrt{3}, -\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)$$

(3) $f(0) = -1, f'(0) = 1$ だから, 接線 ℓ の方程式は

$$y = x - 1$$

となる。次に C と ℓ の共有点を求める。

$y = f(x), y = x - 1$ より y を消去すると,

$$\frac{x-1}{x^2+1} = x-1$$

$$(x-1)x^2 = 0$$

$$\therefore x = 0, 1$$

右図より,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \left(-\frac{x-1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

また, $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと,

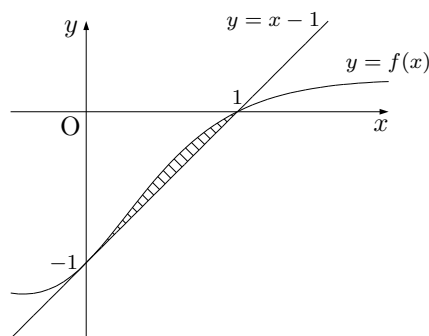
$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad \begin{array}{c|c} x & \theta \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

したがって, 求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4}$$



112. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{(3n+4)a_n - 9n - 6}{(n+1)a_n - 3n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす。

- (1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ であることを示せ。
 (2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおく。 b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。
 (3) (2) で定めた数列 $\{b_n\}$ に対し, $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
 (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[2016 - 2]

【解答】

- (1) すべての自然数 n に対し,

$$a_n > 3 \dots\dots (*)$$

であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 = 4 > 3 \text{ だから成り立つ。}$$

(ii) $n = k$ のとき

(*) が成り立つ, すなわち, $a_k > 3$ であると仮定すると,

$$(k+1)a_k - 3k - 1 > 3(k+1) - 3k - 1 = 2 > 0$$

となるから,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 3 &= \frac{(3k+4)a_k - 9k - 6}{(k+1)a_k - 3k - 1} - 3 \\ &= \frac{a_k - 3}{(k+1)a_k - 3k - 1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

よって, $a_{k+1} > 3$ となり, $n = k+1$ のときも (*) は成り立つ。

(i), (ii) より, すべての自然数 n に対して, $a_n > 3$ が成り立つ。

- (2) (1)(ii) の計算より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1} - 3} &= \frac{(n+1)a_n - 3n - 1}{a_n - 3} \\ &= n + 1 + \frac{2}{a_n - 3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a_n - 3} = b_n \text{ とおくと,}$$

$$b_{n+1} = 2b_n + n + 1$$

【参考】(3) の誘導がない場合

$$b_{n+1} = 2b_n + n + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①が

$$b_{n+1} + p(n+1) + q = 2(b_n + pn + q)$$

と変形できたとすると,

$$b_{n+1} = 2b_n + pn - p + q \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となり, ②は①と一致することから,

$$\begin{cases} p = 1 \\ -p + q = 1 \end{cases}$$

$$\therefore p = 1, q = 2$$

よって,

$$b_{n+1} + (n+1) + 2 = 2(b_n + n + 2)$$

となり, 数列 $\{b_n + n + 2\}$ は初項 $b_1 + 1 + 2 = \frac{1}{a_1 - 3} + 3 = 4$, 公比 2 の等比数列と分かるから,

$$b_n + n + 2 = 4 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 2^{n+1} - n - 2$$

(3) (2) の結果より,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+2} - b_{n+1} \\ &= \{2b_{n+1} + (n+1) + 1\} - (2b_n + n + 1) \\ &= 2(b_{n+1} - b_n) + 1 \\ &= 2c_n + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore c_{n+1} + 1 = 2(c_n + 1)$$

ここで,

$$a_2 = \frac{7a_1 - 15}{2a_1 - 4} = \frac{13}{4}$$

だから,

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_1 = \frac{1}{a_2 - 3} - \frac{1}{a_1 - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{13}{4} - 3} - \frac{1}{4 - 3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

よって, 数列 $\{c_n + 1\}$ は初項 $c_1 + 1 = 4$, 公比 2 の等比数列となるから,

$$c_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore c_n = 2^{n+1} - 1$$

(4) (3) の結果より,

$$b_{n+1} - b_n = 2^{n+1} - 1$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 1) \\ &= 1 + \frac{2^2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n - 1) \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

$n = 1$ とすると, $b_1 = 1$ となり成り立つ。

$b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ より, $a_n = \frac{1}{b_n} + 3$ だから,

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1} - n - 2} + 3$$

113. 座標空間内に

$O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 2)$, $B(1, 0, -1)$, $C(2, -1, 1)$

を頂点とする四面体 $OABC$ がある。 $t > 0$ に対して半直線 OB 上の点 P を $OB : OP = 1 : t$ となるようにとる。

(1) 内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ を t を用いて表せ。

(2) $\triangle APC$ の面積を $S(t)$ とおく。 $S(t)$ が最小になる t の値と、そのときの $S(t)$ の値を求めよ。

(3) 点 Q は直線 OB 上にあり、点 R は直線 AC 上にある。線分 QR の長さの最小値と、そのときの点 R の座標を求めよ。

[2016 - 3]

【解答】

(1) $\overrightarrow{AC} = (1, -3, -1)$ より, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OA} = -7$

また, 条件より, $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB}$ だから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot (t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= t\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= 2t + 7\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = 2t + 7$$

(2) $\overrightarrow{AC} = (1, -3, -1)$ より, $|\overrightarrow{AC}|^2 = 11$

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ より,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2 &= |t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= t^2|\overrightarrow{OB}|^2 - 2t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= 2t^2 + 2t + 9\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 |\overrightarrow{AP}|^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{11(2t^2 + 2t + 9) - (2t + 7)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{18t^2 - 6t + 50} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{18\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{99}{2}} \dots\dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$t > 0$ より, $S(t)$ は

$$t = \frac{1}{6} \text{ のとき, 最小値 } \frac{3\sqrt{22}}{4} \text{ をとる。}$$

- (3) $t < 0$ のとき、点 P を $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB}$ となるようにとれば、①は $t < 0$ のときも成り立つから、直線 OB 上の点で直線 AC との距離が最小になるのは、 $S(t)$ が最小となる点である。よって、点 Q は OB を $1:5$ に内分する点であるから、線分 QR の長さの最小値は、 $t = \frac{1}{6}$ のときの $\triangle APC$ の高さに等しい。その高さを h とすると、 $AC = \sqrt{11}$ 、 $S\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3\sqrt{22}}{4}$ より、

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{11} \cdot h = \frac{3\sqrt{22}}{4}$$

$$\therefore h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$t = \frac{1}{6}$ のとき、(1) より、 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = 2 \cdot \frac{1}{6} + 7 = \frac{22}{3}$ だから、 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AR}|$ より、

$$\frac{22}{3} = \sqrt{11} |\overrightarrow{AR}|$$

$$|\overrightarrow{AR}| = \frac{2\sqrt{11}}{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AR}| = \frac{2}{3} |\overrightarrow{AC}|$$

よって、点 R は AC を $2:1$ に内分する点だから、 $R(x, y, z)$ とすると、

$$x = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{3} = 0$$

$$z = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{4}{3}$$

したがって、

$$QR \text{ の最小値は } \frac{3\sqrt{2}}{2}, R\left(\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$$

【別解】

点 Q は直線 OB 上にあるから、 $Q(q, 0, -q)$ と表せる。点 R は直線 AC 上にあるから、 $R(1+r, 2-3r, 2-r)$ と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} QR^2 &= (q-r-1)^2 + (3r-2)^2 + (-q+r-2)^2 \\ &= 2q^2 - 4qr + 11r^2 + 2q - 14r + 9 \\ &= 2\left(q - \frac{2r-1}{2}\right)^2 + 9\left(r - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となるから、

$$q - \frac{2r-1}{2} = 0 \text{ かつ } r - \frac{2}{3} = 0$$

すなわち、

$$q = \frac{1}{6}, r = \frac{2}{3}$$

のとき、 QR^2 は最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。

したがって、

$$QR \text{ の最小値は } \frac{3\sqrt{2}}{2}, R\left(\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$$

114. 実数 t に対し、複素数

$$\left(\frac{1}{2} + \cos t + i \sin t\right)^2$$

の実部を $f(t)$, 虚部を $g(t)$ とする。

座標平面上に曲線 $C: x = f(t), y = g(t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) がある。

(1) $0 \leq t \leq \pi$ のとき $f(t)$ のとる値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 $P\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right), g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 C の $y \leq 0$ の範囲にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[2016 - 4]

【解答】

(1) $z = \left(\frac{1}{2} + \cos t + i \sin t\right)^2$ とおくと, $f(t)$ は z の実部だから,

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{1}{2} + \cos t\right)^2 - \sin^2 t \\ &= \frac{1}{4} + \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= 2 \cos^2 t + \cos t - \frac{3}{4} \\ &= 2 \left(\cos t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq \pi$ のとき, $-1 \leq \cos t \leq 1$ だから,

$$-\frac{7}{8} \leq f(t) \leq \frac{9}{4}$$

(2) $f(t) = 2 \cos^2 t + \cos t - \frac{3}{4}$ より,

$$f'(t) = -4 \cos t \sin t - \sin t$$

だから,

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

また, $g(t)$ は z の虚部だから,

$$\begin{aligned} g(t) &= 2 \left(\frac{1}{2} + \cos t\right) \sin t = 2 \sin t \cos t + \sin t \\ &= \sin 2t + \sin t \\ g'(t) &= 2 \cos 2t + \cos t \end{aligned}$$

よって,

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

となるから, 点 P における接線の傾きは

$$\frac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

点 P の座標は

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

だから、求める接線の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \sqrt{3}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{9}x + \frac{35\sqrt{3}}{36}$$

(3) $g(t) = 2\sin t \cos t + \sin t = \sin t(2\cos t + 1)$ であり, $0 \leq t \leq \pi$ のとき, $\sin t \geq 0$ だから,
 $g(t) \leq 0$ とすると,

$$\cos t \leq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{3}\pi \leq t \leq \pi$$

ここで,

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

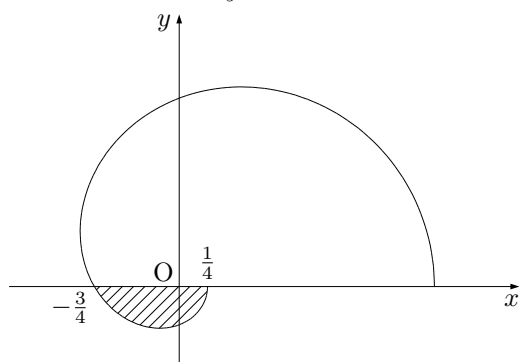
$$f(\pi) = 2(-1)^2 - 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

だから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} (-y) dx \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \{-g(t)\}f'(t) dt \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (\sin 2t + \sin t)(2\sin 2t + \sin t) dt \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (2\sin^2 2t + 3\sin 2t \sin t + \sin^2 t) dt \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left\{ (1 - \cos 4t) - \frac{3}{2}(\cos 3t - \cos t) + \frac{1 - \cos 2t}{2} \right\} dt \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \cos 4t - \frac{3}{2}\cos 3t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{2}\cos t \right) dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t - \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{2}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}\sin t \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

【参考】

ちなみに曲線 C の $y \leq 0$ の範囲にある部分と x 軸とで囲まれた図形は下図の斜線部分である。



115. 関数 $f(x) = \frac{5e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$ に対して $c = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ とおく。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) c の値を求め、 $f(x) \geq c$ となる x の範囲を求めよ。
- (3) $R > 1$ とする。曲線 $y = f(x)$ および 2 直線 $x = -\log R$, $y = c$ で囲まれた図形の面積 $S(R)$ を求めよ。
- (4) (3) で求めた $S(R)$ に対して、極限值 $\lim_{R \rightarrow \infty} S(R)$ を求めよ。

[2017 - 1]

【解答】

(1) $f(x) = \frac{5e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5e^x(e^x + 1)^2 - (5e^x + 1) \cdot 2(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{5e^x(e^x + 1) - 2e^x(5e^x + 1)}{(e^x + 1)^3} \\ &= \frac{e^x\{5(e^x + 1) - 2(5e^x + 1)\}}{(e^x + 1)^3} \\ &= \frac{e^x(-5e^x + 3)}{(e^x + 1)^3} \\ &= -\frac{e^x(5e^x - 3)}{(e^x + 1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } e^x(5e^x - 3) = 0$$

$$e^x \neq 0 \text{ より,}$$

$$5e^x - 3 = 0$$

$$e^x = \frac{3}{5}$$

$$\therefore x = \log \frac{3}{5}$$

よって、関数 $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	$\log \frac{3}{5}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	c	$\nearrow$		$\searrow$	

増減表より、 $f(x)$ は $x = \log \frac{3}{5}$ で極大となり、

$$f\left(\log \frac{3}{5}\right) = \frac{5 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\left(\frac{3}{5} + 1\right)^2} = \frac{4}{\frac{64}{25}} = \frac{25}{16}$$

したがって、 $x = \log \frac{3}{5}$ で極大値 $\frac{25}{16}$ をとる。

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ だから,}$$

$$\begin{aligned} c &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$f(x) \geq c \text{ より, } \frac{5e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \geq 1$$

両辺に $(e^x + 1)^2 (> 0)$ をかけると

$$5e^x + 1 \geq (e^x + 1)^2$$

$$(e^x)^2 - 3e^x \leq 0$$

$$e^x(e^x - 3) \leq 0$$

$e^x > 0$ だから,

$$(0 <) e^x \leq 3$$

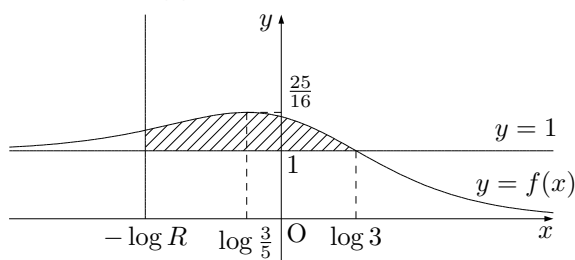
$$\therefore x \leq \log 3$$

よって, $c = 1, x \leq \log 3$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \text{ だから,}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^{-x} + e^{-2x}}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

また, $R > 1$ のとき, $-\log R < 0$ であるから, $y = f(x)$ のグラフは次のようになり, $S(R)$ は斜線部分の面積を表す。



上図より,

$$S(R) = \int_{-\log R}^{\log 3} \left\{ \frac{5e^x + 1}{(e^x + 1)^2} - 1 \right\} dx$$

$$e^x = t \text{ とおくと, } e^x dx = dt \quad \therefore dx = \frac{1}{t} dt$$

x	$-\log R \rightarrow \log 3$
t	$\frac{1}{R} \rightarrow 3$

よって,

$$\begin{aligned}
 S(R) &= \int_{\frac{1}{R}}^3 \left\{ \frac{5t+1}{(t+1)^2} - 1 \right\} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_{\frac{1}{R}}^3 \frac{5t+1-(t+1)^2}{(t+1)^2} \cdot \frac{1}{t} dt \\
 &= \int_{\frac{1}{R}}^3 \frac{-t+3}{(t+1)^2} dt = \int_{\frac{1}{R}}^3 \frac{-(t+1)+4}{(t+1)^2} dt \\
 &= \int_{\frac{1}{R}}^3 \left\{ -\frac{1}{t+1} + \frac{4}{(t+1)^2} \right\} dt \\
 &= \left[-\log(t+1) - \frac{4}{t+1} \right]_{\frac{1}{R}}^3 \\
 &= -\log 4 - 1 + \log \left(\frac{1}{R} + 1 \right) + \frac{4}{\frac{1}{R} + 1} \\
 &= \log \frac{R+1}{R} + \frac{4R}{R+1} - \log 4 - 1
 \end{aligned}$$

(4) (3) より,

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} S(R) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{R+1}{R} + \frac{4R}{R+1} - \log 4 - 1 \right\} \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{R} \right) + \frac{4}{1 + \frac{1}{R}} - \log 4 - 1 \right\} \\
 &= \log 1 + 4 - \log 4 - 1 \\
 &= 3 - \log 4
 \end{aligned}$$

116. 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$x = \cos t + \frac{1}{3} \cos 3t, \quad y = \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t$$

で表される。時刻 t における点 P の速度を $\vec{v}$ とし、加速度を $\vec{a}$ とする。

- (1) 点 P の y 座標の取り得る値の範囲を求めよ。
- (2) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、速度 $\vec{v}$ が直線 $y = \sqrt{3}x$ と平行である時刻 t を求めよ。
- (3) $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき、加速度の大きさ $|\vec{a}|$ の最小値とその値を取る時刻 t を求めよ。
- (4) 時刻 $t = 0$ から $t = \pi$ までに点 P が通過する道のり L を求めよ。

[2017 - 2]

【解答】

$$(1) \quad y = \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t$$

$$= \sin t + \frac{1}{3} (3 \sin t - 4 \sin^3 t)$$

$$= -\frac{4}{3} \sin^3 t + 2 \sin t$$

$\sin t = X$ とおくと、 $-1 \leq X \leq 1$ であり、

$$y = -\frac{4}{3} X^3 + 2X$$

$y = g(X)$ とおくと、 $g'(X) = -4X^2 + 2$

$$g'(X) = 0 \text{ とすると、} X = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって、関数 $g(X)$ の増減は次のようになる。

X	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$g'(X)$		-	0	+	0	-	
$g(X)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$

増減表より、 $g(X)$ 、すなわち点 P の y 座標の取り得る値の範囲は

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq y \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(2) \quad x = \cos t + \frac{1}{3} \cos 3t \text{ より、}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t - \sin 3t$$

$$y = \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \text{ より、}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t + \cos 3t$$

よって、速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-\sin t - \sin 3t, \cos t + \cos 3t)$$

となり、 $\vec{v}$ が直線 $y = \sqrt{3}x$ と平行であるのは、

$$\cos t + \cos 3t = \pm\sqrt{3}(\sin t + \sin 3t)$$

が成り立つときである。上式を変形すると

$$-2\cos 2t \cos t = \pm 2\sqrt{3} \sin 2t \cos t$$

$$\cos t(\sqrt{3} \sin 2t \pm \cos 2t) = 0$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos t \neq 0$ だから、

$$\sqrt{3} \sin 2t \pm \cos 2t = 0$$

$$2 \sin \left(2t \pm \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$2t \pm \frac{\pi}{6} = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\therefore t = \frac{6n \pm 1}{12} \pi$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ より、 $t = \frac{5}{12} \pi$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t - \sin 3t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t + \cos 3t \text{ より,}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t - 3\cos 3t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\sin t - 3\sin 3t$$

よって、加速度 $\vec{\alpha}$ は

$$\vec{\alpha} = (-\cos t - 3\cos 3t, -\sin t - 3\sin 3t)$$

となるから、

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha}|^2 &= (\cos t + 3\cos 3t)^2 + (\sin t + 3\sin 3t)^2 \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t) + 6(\cos 3t \cos t + \sin 3t \sin t) + 9(\cos^2 3t + \sin^2 3t) \\ &= 6\cos 2t + 10 \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ のとき、 $-1 \leq \cos 2t \leq 1$ だから、 $\cos 2t = -1$ のとき、 $|\vec{\alpha}|$ は最小値 2 をとる。

$\cos 2t = -1$ のとき、

$$2t = \pi, 3\pi$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

よって、 $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ のとき、最小値 2 をとる。

$$\begin{aligned}(4) \quad L &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\&= \int_0^\pi \sqrt{(\sin t + \sin 3t)^2 + (\cos t + \cos 3t)^2} dt \\&= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2(\sin 3t \sin t + \cos 3t \cos t)} dt \\&= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos 2t} dt = \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 t} dt = \int_0^\pi 2|\cos t| dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-2 \cos t) dt \\&= \left[2 \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-2 \sin t \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\&= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

117. θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ をみたす定数とし、自然数 n に対して $a_n = \tan \frac{\theta}{2^n}$ とおく。

- (1) 数列 $\{2^n a_n\}$ の極限を求めよ。
- (2) n が 2 以上のとき $\frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} = a_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$ とおく。 n が 2 以上のとき S_n を a_1 と a_n で表せ。
- (4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ の和を求めよ。

[2017 - 3]

【解答】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \tan \frac{\theta}{2^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}}{\cos \frac{\theta}{2^n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \cdot \frac{\theta}{\cos \frac{\theta}{2^n}} \\
 &= \theta
 \end{aligned}$$

- (2) $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より、 $0 < \frac{\theta}{2^n} < \frac{\pi}{2^{n+2}}$ となるから、 $0 < a_n < 1$ である。
 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_{n-1} &= \tan \frac{\theta}{2^{n-1}} = \tan \left(2 \cdot \frac{\theta}{2^n} \right) \\
 &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2^n}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2^n}} \\
 &= \frac{2a_n}{1 - a_n^2}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。上式の両辺の逆数をとることによって

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_{n-1}} &= \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \\
 \frac{2}{a_{n-1}} &= \frac{1}{a_n} - a_n \\
 \therefore \frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} &= a_n
 \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果より、 $n \geq 2$ のとき、

$$\frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} = a_n$$

が成り立つから,

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2^n a_n} - \frac{1}{2^{n-1} a_{n-1}}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{2^k} \\ &= \frac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2^k a_k} - \frac{1}{2^{k-1} a_{k-1}} \right) \\ &= \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2^n a_n} - \frac{1}{2a_1} \end{aligned}$$

よって, $n \geq 2$ のとき,

$$S_n = \frac{1}{2^n a_n} + \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2a_1}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ を求めるときは, $n \geq 2$ としてよいから, (3) の結果より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n a_n} + \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2a_1} \right) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2a_1} &= \frac{a_1^2 - 1}{2a_1} \\ &= \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2} - 1}{2 \tan \frac{\theta}{2}} \\ &= -\frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \theta$ であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tan \theta}$$

118. 複素数平面上の原点 O と異なる 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ に対して

$$3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$$

が成り立つ。3 点 O , A , B を通る円を C とする。

(1) $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

(2) 円 C の中心と半径を α を用いて表せ。

(3) $|3\alpha - 2\beta|$ を β を用いて表せ。

(4) 次が成り立つとき α を求めよ。

(ア) 点 z が円 C 上を動くとき $w = iz$ も C 上にある。

(イ) $\alpha + \bar{\alpha}$ は正の実数である。

(ウ) $|3\alpha - 2\beta| = 2\sqrt{6}$

[2017 - 4]

【解答】

(1) 2 点 A , B は原点と異なる点であるから、 $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ である。 $3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$ の両辺を β^2 ($\neq 0$) で割ると

$$3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 6 \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 4 = 0$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i \right)$$

偏角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ であるから、

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

(2) (1) の結果より、 $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ であり、

$$\frac{OA}{OB} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \therefore OA : OB = 2 : \sqrt{3}$$

よって、 $\triangle OAB$ は $\angle B = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

したがって、点 B は OA を直径とする円周上にあるから、

$$\text{円 } C \text{ の中心は } \frac{\alpha}{2}, \text{ 半径は } \frac{|\alpha|}{2}$$

となる。

$$(3) \quad (1) \text{ より, } \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{3}\beta \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} |3\alpha - 2\beta| &= |(3 \pm \sqrt{3}i)\beta - 2\beta| \\ &= |1 \pm \sqrt{3}i||\beta| = 2|\beta| \end{aligned}$$

【別解】

$3\alpha - 2\beta$ が表す点を D とすると, 点 D は AB を 2 : 3 に外分するから,

$$BD = 3AB = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}OB = \sqrt{3}|\beta|$$

三平方の定理より,

$$\begin{aligned} OD &= \sqrt{OB^2 + BD^2} \\ &= \sqrt{|\beta|^2 + (\sqrt{3}|\beta|)^2} \\ &= 2|\beta| \end{aligned}$$

$$\therefore |3\alpha - 2\beta| = 2|\beta|$$

(4) 点 z が円 C 上を動くとき点 $w = iz$ も C 上にあるから, 円 C の中心 $\frac{\alpha}{2}$ を同様に移動した点は動かない。よって,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\alpha}{2} \\ \therefore \alpha &= i\bar{\alpha} \dots\dots\dots ① \end{aligned}$$

$\alpha = a + bi$ (a, b は実数) とおく。条件 (イ) より, $\alpha + \bar{\alpha} = 2a$ は正の実数であるから, $a > 0$

$$|3\alpha - 2\beta| = 2\sqrt{6} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} 2|\beta| &= 2\sqrt{6} \\ \therefore |\beta| &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ より}$$

$$|\alpha| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|\beta| = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots ②$$

①より,

$$\begin{aligned} a + bi &= i(a - bi) \\ a + bi &= b + ai \\ \therefore a &= b \end{aligned}$$

②より,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + a^2} &= 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}a &= 2\sqrt{2} \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

よって, $\alpha = 2 + 2i$

【別解】(①までの別解)

$$w = i\bar{z} \text{ より,}$$

$$\bar{w} = -iz$$

$$\therefore z = -\frac{\bar{w}}{i} = i\bar{w}$$

z は円 C 上を動くから

$$\left| z - \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{|\alpha|}{2}$$

$$\left| i\bar{w} - \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{|\alpha|}{2}$$

$$|i| \left| \bar{w} - \frac{\alpha}{2i} \right| = \frac{|\alpha|}{2}$$

$$\left| \bar{w} - \frac{\alpha}{2i} \right| = \frac{|\alpha|}{2}$$

$$\left| w + \frac{\bar{\alpha}}{2i} \right| = \frac{|\alpha|}{2}$$

任意の w がすべて C 上にあるから, これは C の方程式と一致する。したがって,

$$-\frac{\bar{\alpha}}{2i} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \alpha = -\frac{\bar{\alpha}}{i} = i\bar{\alpha} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

119. 次の問いに答えよ。

- (1) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ を満たす複素数 z の値を求めよ。また、このとき $\alpha = z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ。
- (2) $z + \frac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は、どのような図形を表すか。
- (3) $z + \frac{1}{z}$ が実数複素数 z と、 $\left| w - \left(\frac{8}{3} + 2i \right) \right| = \frac{2}{3}$ を満たす複素数 w について、 $|z - w|$ の最小値を求めよ。

[2018 - 1]

【解答】

(1) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ より,

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

$$\therefore z = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

z を極形式で表すと,

$$z = \cos\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{6}\right)$$

となるから,

$$z^{12} = \cos(\pm 2\pi) + i \sin(\pm 2\pi) = 1$$

よって,

$$\begin{aligned} \alpha &= z^{100} + \frac{1}{z^{100}} \\ &= (z^{12})^8 \cdot z^4 + \frac{1}{(z^{12})^8 \cdot z^4} \\ &= z^4 + \frac{1}{z^4} \\ &= \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\mp \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\mp \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= -1 \end{aligned}$$

(2) $z + \frac{1}{z}$ が実数であるとき、 $z \neq 0$ で,

$$z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}}$$

が成り立つ。よって,

$$z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

$$z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0$$

$$(z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{|z|^2} \right) = 0$$

$$\therefore z = \bar{z} \quad \text{または} \quad |z| = 1$$

よって、 z は実数、または点 z は原点を中心とする半径 1 の円上にある。

したがって、求める図形は、原点を除く実軸と原点を中心とする半径 1 の円である。

- (3) $\frac{8}{3} + 2i$ が表す点を A とすると、点 w は点 A を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円上にある。

2 点 O, A を結ぶ線分と 2 つの円の交点を右図のように P, Q とする。点 z が原点を中心とする円上にあるとき、 $|z - w|$ の最小値は PQ である。

$$OA = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{64 + 36}}{3} = \frac{10}{3}$$

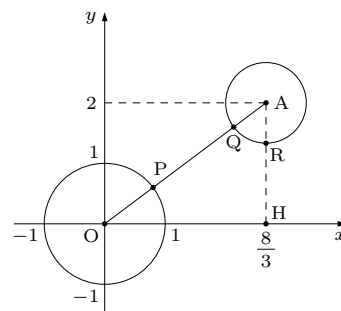
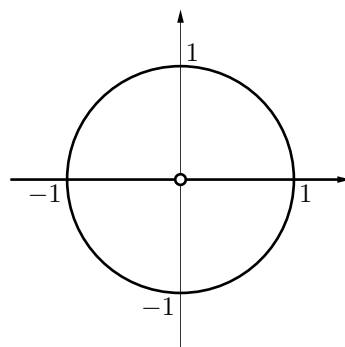
であるから、

$$PQ = OA - 1 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$H\left(\frac{8}{3}\right)$ とし、点 A を中心とする半径 $\frac{2}{3}$ の円と AH の交点を R とすると、点 z が実軸上にあるとき、 $|z - w|$ の最小値は RH である。

$$RH = AH - AR = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

よって、 $|z - w|$ の最小値は $\frac{4}{3}$



120. 関数 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ に対して、数列 $\{a_n\}$ を次で定義する。

$$a_1 = 3, a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

方程式 $f(x) = x$ の解を α とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して、 $a_n > \alpha$ が成り立つことを示せ。
- (2) 自然数 n に対して、 $a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ が成り立つことを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し、その極限値を求めよ。

[2018 - 2]

【解答】

$$(1) \quad f(x) = x \text{ より, } \sqrt{2x+1} = x$$

両辺を 2 乗すると、

$$2x+1 = x^2$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \geq 0 \text{ だから, } x \geq 0$$

$$\text{よって, } \alpha = 1 + \sqrt{2}$$

$n = 1$ のとき

$$a_1 - \alpha = 3 - (1 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} > 0$$

となり、 $a_1 > \alpha$ は成り立つ。

$n = k$ のとき、 $a_k > \alpha$ が成り立つと仮定すると、

$$a_{k+1} = \sqrt{2a_k+1} > \sqrt{2\alpha+1} = f(\alpha) = \alpha$$

となるから、 $n = k+1$ のときも成り立つ。

したがって、数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して $a_n > \alpha$ が成り立つ。

$$(2) \quad a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - \alpha$$

$$= \sqrt{2a_n+1} - \alpha$$

$$= \frac{2a_n+1-\alpha^2}{\sqrt{2a_n+1}+\alpha}$$

$$= \frac{2a_n+1-(2\alpha+1)}{\sqrt{2a_n+1}+\alpha}$$

$$= \frac{2(a_n-\alpha)}{\sqrt{2a_n+1}+\alpha}$$

$$< \frac{2(a_n-\alpha)}{\sqrt{2\alpha+1}+\alpha}$$

$$= \frac{2(a_n-\alpha)}{\alpha+\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha}(a_n-\alpha)$$

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} > 2 \text{ より, } \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2} \text{ だから,}$$

$$a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$$

(3) (2) の結果を繰り返し用いると,

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &< \frac{1}{2} |a_{n-1} - \alpha| \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_{n-2} - \alpha| < \cdots \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - \alpha| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

よって,

$$0 < |a_n - \alpha| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - \sqrt{2})$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - \sqrt{2}) = 0$ だから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0$$

したがって, $\{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

121. 関数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ に対して、 $g(t) = \int_0^1 |f(x) - t| dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値と最小値求めよ。

(2) $g(0)$ と $g(1)$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(4) $g(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) の最小値を求めよ。

[2018 - 3]

【解答】

(1) $f(x) = \frac{2}{1+x} - 1$ より、 $0 \leq x \leq 1$ において、 $f(x)$ は単調に減少する。よって、

$x = 0$ で最大値 1, $x = 1$ で最小値 0 をとる。

(2) $g(t) = \int_0^1 |f(x) - t| dx$ より、

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) dx \\ &= \left[2 \log(x+1) - x \right]_0^1 \\ &= 2 \log 2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1) &= \int_0^1 |f(x) - 1| dx = \int_0^1 \{1 - f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= \left[2x - 2 \log(x+1) \right]_0^1 \\ &= 2 - 2 \log 2 \end{aligned}$$

(3) $y = f(x)$ より、

$$y = \frac{2}{x+1} - 1$$

$$\frac{2}{x+1} = y + 1$$

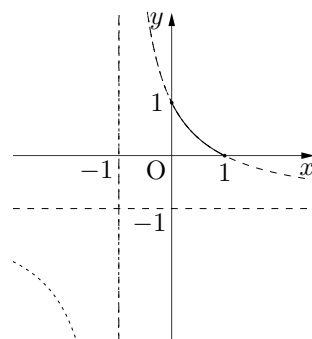
$$x + 1 = \frac{2}{y + 1}$$

$$\therefore x = \frac{2}{y + 1} - 1$$

x と y を入れ替えると

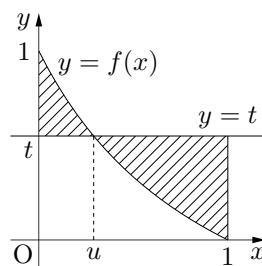
$$y = \frac{2}{x+1} - 1 = \frac{1-x}{1+x}$$

よって、 $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$



(4) $f^{-1}(t) = u$ とおくと, (3) の結果より, $u = \frac{1-t}{1+t}$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_0^u \{f(x) - t\} dx + \int_u^1 \{t - f(x)\} dx \\
 &= \int_0^u \left(\frac{2}{1+x} - 1 - t \right) dx - \int_u^1 \left(\frac{2}{1+x} - 1 - t \right) dx \\
 &= \left[2 \log(1+x) - (1+t)x \right]_0^u - \left[2 \log(1+x) - (1+t)x \right]_u^1 \\
 &= 2 \log(1+u) - (1+t)u - \{2 \log 2 - (1+t)\} + 2 \log(1+u) - (1+t)u \\
 &= 4 \log(1+u) - 2(1+t)u - 2 \log 2 + (1+t) \\
 &= 4 \log \left(1 + \frac{1-t}{1+t} \right) - 2(1+t) \cdot \frac{1-t}{1+t} - 2 \log 2 + 1 + t \\
 &= 4 \log \frac{2}{1+t} - 2(1-t) - 2 \log 2 + 1 + t \\
 &= 4 \log 2 - 4 \log(1+t) - 2 + 2t - 2 \log 2 + 1 + t \\
 &= -4 \log(1+t) + 3t + 2 \log 2 - 1
 \end{aligned}$$



$$g'(t) = -\frac{4}{1+t} + 3 = \frac{3t-1}{1+t}$$

$g'(t) = 0$ とすると, $t = \frac{1}{3}$

よって, 関数 $g(t)$ の増減は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	$2 \log 2 - 1$	$\searrow$	$4 \log 3 - 6 \log 2$	$\nearrow$	$2 - 2 \log 2$

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{1}{3}\right) &= -4 \log \frac{4}{3} + 1 + 2 \log 2 - 1 \\
 &= -4(\log 4 - \log 3) + 2 \log 2 \\
 &= 4 \log 3 - 6 \log 2
 \end{aligned}$$

よって, $g(t)$ の最小値は, $g\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \log 3 - 6 \log 2$

122. 座標空間内の 3 点

$O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 4)$, $B(1, -2, 2)$

を通る平面を α とする。 α 上にない 2 点 C, D は次を満たす。

- (i) 点 C, D は平面 α に関して同じ側にある。
- (ii) 点 C から α に垂線 CE を下ろすと、半直線 OE は角 AOB の二等分線であり、辺 AB と点 G で交わる。点 G は OE を $3:1$ に内分する。
- (iii) 点 D から α に垂線 DF を下ろすと、半直線 AF は辺 OB と点 H で交わる。点 H は辺 OB を $1:2$ に内分する。
- (iv) $CE = 2DF$

定数 k を $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AH}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表し、点 G の座標を求めよ。
- (2) 平面 α に垂直なベクトルで、長さが $\sqrt{26}$ となるものを 1 つ求めよ。
- (3) 点 C から平面 α 上の点を通り点 D へ最短経路がある。このときに通る平面 α 上の点を P とする。 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ および k を用いて表せ。
- (4) (3) において、点 P が $\triangle OAB$ の内部にあるための k の値の範囲を求めよ。

[2018 - 4]

【解答】

- (1) $OA = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$, $OB = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ であり、

点 G は $\angle AOB$ の二等分線と AB の交点であるから、点 G は AB を $OA : OB = 5 : 3$ に内分する。よって、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{8}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 4)$, $\overrightarrow{OB} = (1, -2, 2)$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{3}{8}(3, 0, 4) + \frac{5}{8}(1, -2, 2) \\ &= \left(\frac{9+5}{8}, \frac{0-10}{8}, \frac{12+10}{8} \right) \\ &= \left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{11}{4} \right)\end{aligned}$$

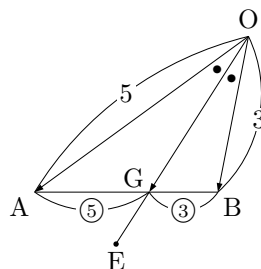
よって、点 G の座標は $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{11}{4} \right)$

- (2) 求めるベクトルを $\vec{u}$ とすると、 $\overrightarrow{OA} = (3, 0, 4)$ に垂直だから、 $\vec{u} = p(4, q, -3)$ ($p > 0$) と表せる。さらに、 $\vec{u} \perp \overrightarrow{OB}$ だから、

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$p(4 - 2q - 6) = 0$$

$$\therefore q = -1$$



$$\begin{aligned}
 |\vec{u}| &= \sqrt{26} \text{ だから,} \\
 p\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2} &= \sqrt{26} \\
 \sqrt{26}p &= \sqrt{26} \\
 \therefore p &= 1
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \vec{u} = (4, -1, -3)$$

【別解 I】

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & 0 & 4 & 3 & \cdots & \vec{a} \text{ の成分を } x \text{ 成分, } y \text{ 成分, } z \text{ 成分, } x \text{ 成分の順に並べる} \\
 \times & \times & \times & & & \\
 1 & -2 & 2 & 1 & \cdots & \vec{b} \text{ の成分を } x \text{ 成分, } y \text{ 成分, } z \text{ 成分, } x \text{ 成分の順に並べる} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
 \textcircled{3} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (8, -2, -6) // (4, -1, -3) \\
 |(4, -1, -3)| &= \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} \\
 \text{よって, } \vec{u} &= (4, -1, -3)
 \end{aligned}$$

【別解 II】

求めるベクトルを $\vec{u} = (a, b, c)$ とすると, $|\vec{u}| = \sqrt{26}$ より,

$$\begin{aligned}
 |\vec{u}|^2 &= 26 \\
 \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= 26 \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ は $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ の両方に垂直であるから,

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{OA} &= \vec{u} \cdot \vec{OB} = 0 \\
 \begin{cases} 3a + 4c = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ a - 2b + 2c = 0 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } c = -\frac{3}{4}a \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

$\textcircled{3}$ に代入して,

$$\begin{aligned}
 a - 2b - \frac{3}{2}a &= 0 \\
 \therefore b &= -\frac{1}{4}a \cdots \cdots \textcircled{3}'
 \end{aligned}$$

$\textcircled{2}'$, $\textcircled{3}'$ を $\textcircled{1}$ に代入して,

$$\begin{aligned}
 a^2 + \left(-\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}a\right)^2 &= 26 \\
 \frac{26}{16}a^2 &= 26 \\
 a^2 &= 16 \\
 \therefore a &= \pm 4
 \end{aligned}$$

$$a = 4 \text{ として, } b = -1, c = -3$$

$$\text{よって, } \vec{u} = (4, -1, -3)$$

- (3) 平面 α に関して点 D と対称な点を D' とし, 平面 α 上の任意の点を Q とすると, $DQ = D'Q$ が成り立つ。よって, $CQ + QD = CQ + QD'$ であり, $CQ + QD'$ が最小になるのは, 3 点 C, Q, D' が一直線上にあるときである。したがって, CD' と平面 α の交点が点 P である。

$\triangle D'PF \sim \triangle CPE$ であり, $D'F : CE = DF = CE = 1 : 2$ だから, $FP : PE = 1 : 2$ である。よって,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OF} \dots\dots ①$$

ここで, 点 G は OE を 3 : 1 に内分するから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{4}{3}\overrightarrow{OG} \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} \dots\dots ②\end{aligned}$$

点 H は OB を 1 : 2 に内分するから, $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\vec{b}$ である。

さらに $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AH}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AH} \\ &= \vec{a} + k\left(\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= (1-k)\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} \dots\dots ③\end{aligned}$$

②, ③を①に代入して,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}\right) + \frac{2}{3}\left\{(1-k)\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b}\right\} \\ &= \frac{5-4k}{6}\vec{a} + \frac{5+4k}{18}\vec{b}\end{aligned}$$

(4) 点 P が $\triangle OAB$ の内部にあるのは,

$$\frac{5-4k}{6} > 0 \dots\dots ④$$

$$\frac{5+4k}{18} > 0 \dots\dots ⑤$$

$$\frac{5-4k}{6} + \frac{5+4k}{18} < 1 \dots\dots ⑥$$

が成り立つときである。④より, $k < \frac{5}{4} \dots\dots ④'$

⑤より, $k > -\frac{5}{4} \dots\dots ⑤'$

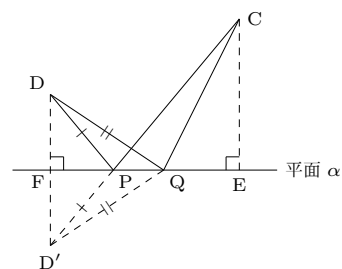
⑥より,

$$3(5-4k) + (5+4k) < 18$$

$$20 - 8k < 18$$

$$\therefore k > \frac{1}{4} \dots\dots ⑥'$$

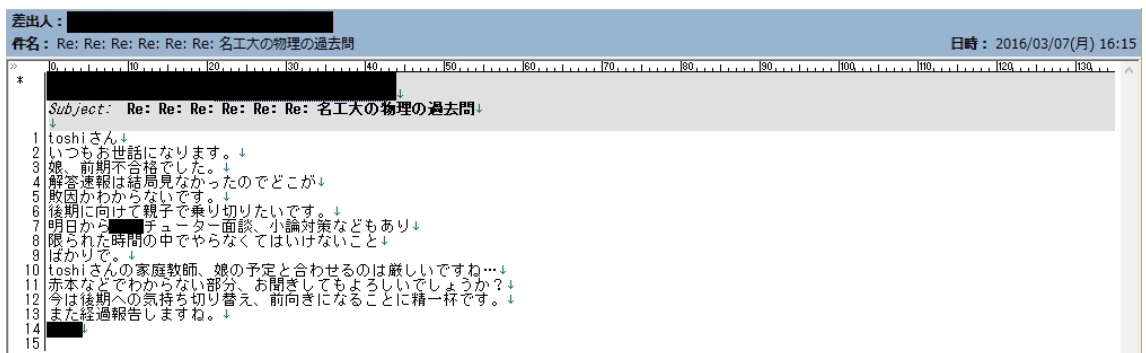
④', ⑤', ⑥' より, $\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$



最後に

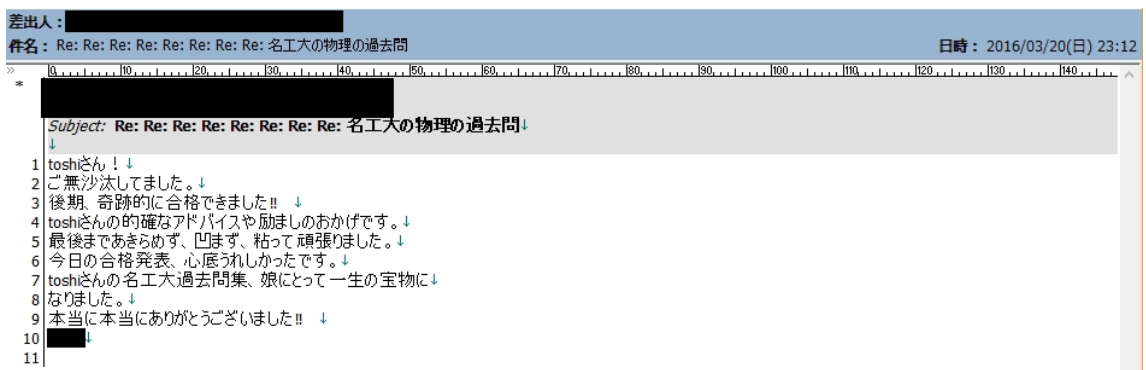
何も宣伝していないにも関わらず、毎年様々な方がご購入していただくことに心から感謝いたします。

今までのご購入者様の中には、受験まで毎日のようにメールのやり取りをしていた方もいらっしゃいました。しかし、前期日程不合格という連絡をいただいたときはショックでした。



※前期合格発表日のメール

その後もメールでのアドバイスや励ましの結果なのか、後期日程で見事逆転合格しました。その連絡をいただいたときは、まるで私が合格したかのような喜びが湧いてきました。

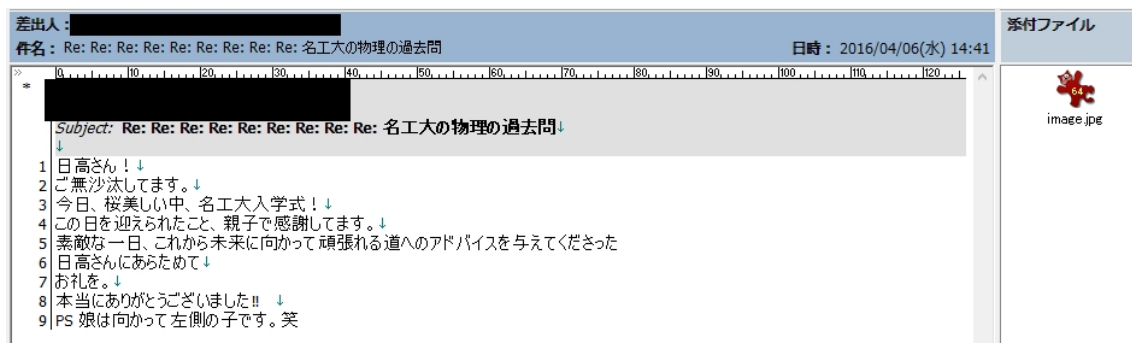


※後期合格発表日のメール

「名工大過去問集、娘にとって一生の宝物になりました。
本当に本当にありがとうございました!!」

この喜びと感謝の言葉が私の宝物になりました。

その後、名古屋工業大学の入学式の日に桜の木の下で撮った写真を添付したメールをいただきました。



現在はオンライン指導の環境が整ったため、日本全国どこに住んでいても指導できるようになりました。電子書籍「名古屋工業大の数学 1993 年～2018 年」だけでなく、直接指導を受けたいという方は「オンラインプロ家庭教師 理数ゼミ」(<http://risusemi.com/>) 内のお問い合わせフォームよりお申込み下さい。ただし、指導できる人数には限りがありますので、お申込み時期や希望する指導時間帯によってはお引き受けできない場合もあります。

オンライン指導の有無に関わらず、メールでの質問はいつでも受け付けています。どんな些細なことでも構わないので気軽に質問して下さい。

この名工大過去問集によって、あなたが名工大に合格できるようお祈りいたします。

「名古屋工業大の数学 1993 年～2018 年」

著者 日高 敏宏

発行元 理数ゼミ

mail risuu.semi@gmail.com

本書の内容を無断で転載・複写複製（コピー）
することを禁じます。

本書の内容についてのお問い合わせは上記メー
ルアドレスにメールにてお願いします。

